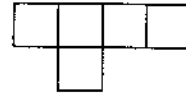


4 Pentominos

Findet weitere Quadratfünflinge.
 Zeichnet sie auf Karopapier und schneidet sie aus.
 Wie viele unterschiedliche Pentominos gibt es?

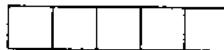


Worum geht es?

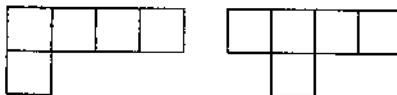
Die Pentominos gehören zur Familie der Polyominos. Ein Polyomino ist eine Figur aus identischen Quadraten, die aneinandergereiht sind und dabei jeweils mindestens eine Seite gemeinsam haben. Der Begriff Polyomino geht auf Solomon W. Golomb zurück, der ihn 1953 in Harvard bei einem Vortrag einführte. Polyominos sind in den letzten Jahrzehnten zu einem beliebten Thema der Unterhaltungsmathematik geworden.

Pentominos sind Figuren aus 5 zusammenhängenden Quadraten. Die Quadrate müssen sich jeweils mit einer Seite berühren. Figuren, die sich durch drehen oder spiegeln ineinander überführen lassen, werden als identisch betrachtet. Es gibt keine allgemeine Formel, um die Anzahl verschiedener Polyominos aus n Quadraten zu bestimmen. Pentominos lassen sich insgesamt 12 unterschiedliche finden:

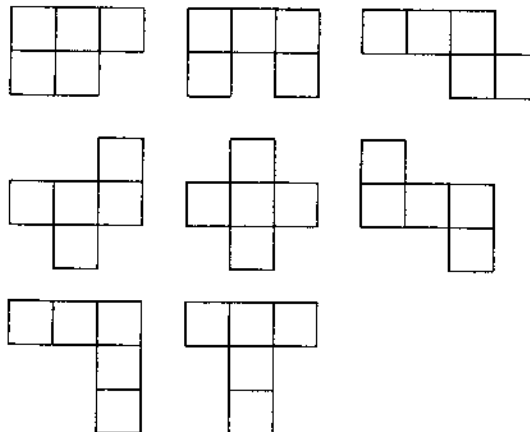
1. fünf Quadrate in einer Reihe:



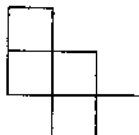
2. vier Quadrate in einer Reihe:



3. drei Quadrate in einer Reihe:



4. zwei Quadrate in einer Reihe:



Themenfeld

Form und Veränderung

Anforderung

arithmetische Vorstellungen mit Hilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen

Allgemeine mathematische Kompetenz

Argumentieren: arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben

Stufe

3. bis 5. Klasse,
 geeignet auch für jahrgangsgemischte Lerngruppen

Zeitbedarf

mindestens 5 Unterrichtsstunden

Material

- Scheren
- Kopiervorlage 4

Alle anderen möglichen Anordnungen sind mit den hier vorgestellten identisch. Ob man alle Möglichkeiten gefunden hat, erschließt sich aus der Anschauung.

Für die Arbeit in der Schule bieten sich die Pentominos an, da ihre Anzahl für die Schüler überschaubar ist (Hexominos gibt es immerhin schon 35, Heptominos sogar schon 108) und dennoch groß genug für vielfältige Untersuchungen und Beobachtungen.

Aufgabenstellungen zu folgenden Schwerpunkten eignen sich als Einstieg in das Thema besonders:

- alle Pentominos finden
- Gesetzmäßigkeiten finden, nach denen sich die Pentominos anordnen oder sortieren lassen
- mit Pentominos Muster erfinden und legen
- vorgegebene Muster und geometrische Formen mit Pentominos auslegen

Wie könnte man vorgehen?

Eines der Pentominos wird der Klasse als Beispiel aus Formenplättchen, Pappe oder Faltpapier auf dem Fußboden im Stuhlkreis oder an der Tafel präsentiert:



In Arbeitsgruppen wird die Aufgabe bearbeitet, weitere Aufgaben zu finden. Die Offenheit der Aufgabenstellung schafft Spielräume für unterschiedliche Herangehensweisen und Lösungswege. Es erscheint wenig hilfreich, die Anzahl der möglichen Pentominos schon von vornherein vorzugeben. Das Vorgeben von Karopapier, das auf eine Kantenlänge von 1,5 bis 2 cm vergrößert wurde, erleichtert den Schülern die Arbeit erheblich.

Im auswertenden Unterrichtsgespräch stellen die Gruppen ihre Ergebnisse vor. Spannend ist zunächst die Frage, wie viele Pentominos die Gruppen jeweils gefunden haben. Eine lebhafte Diskussion um die Fragen:

- Wann sind 2 Pentominos gleich?
- Gelten auch Pentominos, die sich nur in den Ecken berühren?
- Wie viele Pentominos gibt es überhaupt?
- Woher weiß man, ob man alle gefunden hat?

kann sich hier ergeben. Falls noch nicht alle 12 Möglichkeiten gefunden wurden, werden gemeinsam die noch fehlenden gesucht. Dabei lässt sich beobachten, welche Schüler bereits systematisch vorgehen und wer ungeordnet probiert.

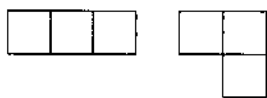
Jede Arbeitsgruppe stellt danach alle Pentominos her. Auch hier sind Vergrößerungen von Karopapier mit zwei Zentimeter Kantenlänge auf festes Papier hilfreich. Die Gruppe versucht, eine Ordnungsstruktur für die Pentominos zu finden. Dies erfordert einen längeren Diskussionsprozess, da viele

unterschiedliche Möglichkeiten der Anordnung und Klassifizierung denkbar sind. Die Suche nach verbindenden und auch unterscheidenden Strukturen ist ein wichtiger Prozess, bei dem die Schüler sich gegenseitig mit unterschiedlichen Sichtweisen und Ideen anregen können. Erst wenn eine Anordnung gefunden ist die alle überzeugt, werden die Pentominos geordnet auf ein Plakat geklebt und mit den entwickelten Ordnungskriterien kommentiert. Im auswertenden Unterrichtsgespräch erläutert und begründet jede Gruppe ihr Vorgehen.

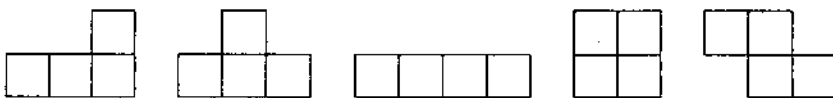
Anstelle des Aufzeichnens und Ausschneidens können die Pentominos auch aus fertigen Quadraten (aus gevierteltem Faltpapier oder Notizzetteln) gelegt werden.

Im 3. Schuljahr könnte man zunächst vorbereitend über Quadratdrillinge und Vierlinge sprechen.

Die Drillinge sind schnell gefunden:



Hieraus lassen sich die Vierlinge durch Anlegen eines weiteren Quadrats konstruieren.



Zur Weiterarbeit bieten sich mit den Pentominos vielfältige Legeübungen an.

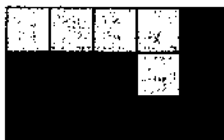
- Welche Formen lassen sich zu einem Rechteck zusammen legen?
- Kann man alle 12 Pentominos zu einem Rechteck zusammenlegen?

Nach einer längeren Phase des Ausprobierens lässt sich ein Zusammenhang zu unterschiedlichen Einmaleinsreihen entdecken. Da die Pentominos aus jeweils fünf Teilen bestehen, muss ein geschlossenes Rechteck aus einer durch fünf teilbaren Anzahl von Quadraten bestehen. Hier ergibt sich auch ein enger Zusammenhang zur Flächeninhaltsberechnung des Rechtecks.

- Rechtecke zum Einmalfünf finden

Beispiellösungen:

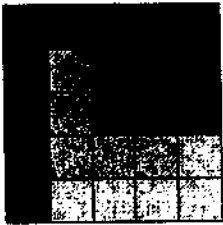
3 mal 5



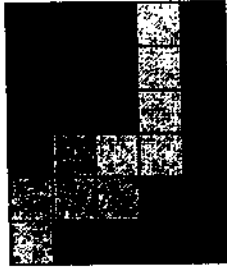
4 mal 5



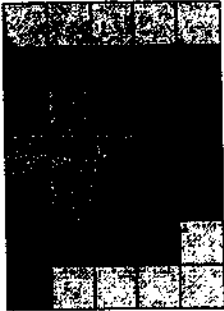
5 mal 5



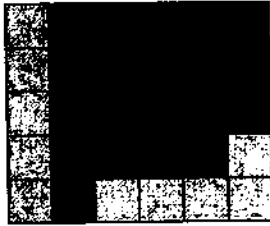
6 mal 5



7 mal 5

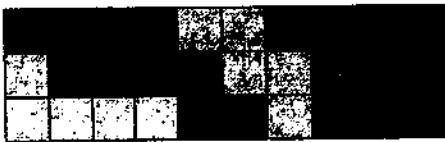


5 mal 6



- zu einer Malaufgabe möglichst viele Pentomino-Rechtecke finden

Beispiel: 3 mal 10



Ein 10 mal 6 Rechteck ist eine echte Herausforderung, so scheint es jedenfalls. Nur eine einzige Lösung zu finden, ist auch für Erwachsene nicht leicht. Wer hätte gedacht, dass es insgesamt 2339 verschiedene Lösungsmöglichkeiten für ein 10 mal 6 Rechteck gibt?

Weitere Aufgaben:

- mit allen 12 Formen ein Rechteck legen
- aus 9 Teilen ein großes Pentomino legen
- vorgegebene Figuren auslegen
- vorgegebene Figuren mit nur einem Typ der Pentominos auslegen (Parkettierungen)
- Welche der Pentominos ergeben durch Zusammenfalten eine offene Schachtel? (in Klasse 3 als Vorbereitung auf die Arbeit an Würfelnetzen)

Durch die vielen unterschiedlichen Fragestellungen sowie die Spielräume bei der Intensität der Beschäftigung mit einer Aufgabe ergibt sich ganz von allein eine natürliche Differenzierung.

Dokumente aus der Erprobung

Die Unterrichtssequenz wurde in einer 4. Klasse zum Ende des Schuljahres erprobt. Die Aufgabenstellung war für alle Schüler interessant und motivierend.

Im ersten Unterrichtsgespräch zur Frage: „Was ist ein Pentomino?“ wurde herausgearbeitet, dass sich bei den Quadraten jeweils eine Seite berühren muss. In den Arbeitsgruppen wurden dann weitere Fünflinge gesucht (die Schüler erhielten dazu farbiges Papier, auf das große Karos kopiert waren), ohne dass deren genaue Anzahl bekannt war. Dies sorgte im Auswertungsgespräch für eine gute Diskussionsgrundlage: Wann sind Fünflinge gleich? Was ist mit spiegelsymmetrischen Fünflingen? Habt ihr alle möglichen Fünflinge gefunden?

Erstaunlich viele verschiedene Ideen entstanden beim Ordnen der Pentomino's. Die Schülergruppen fanden ganz unterschiedliche Ordnungskriterien:

Bild 1

einige Fünflinge sehen aus wie Buchstaben:

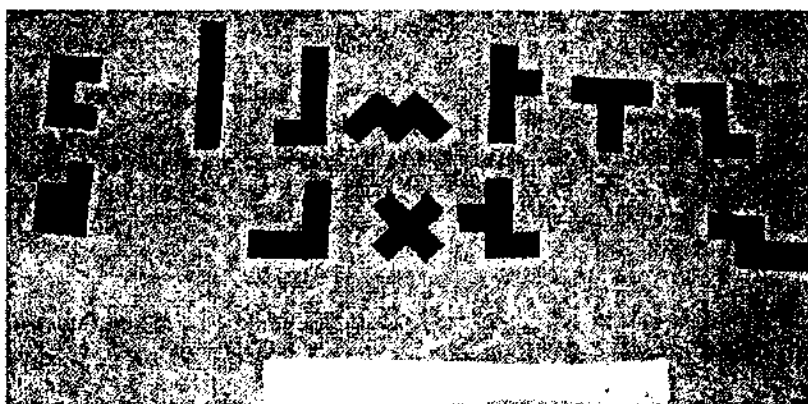


Bild 2

systematisch nach der Anzahl der Quadrate pro Reihe:

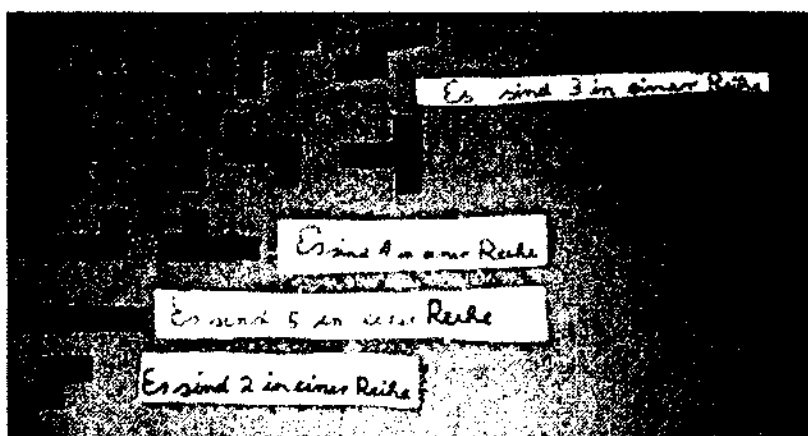
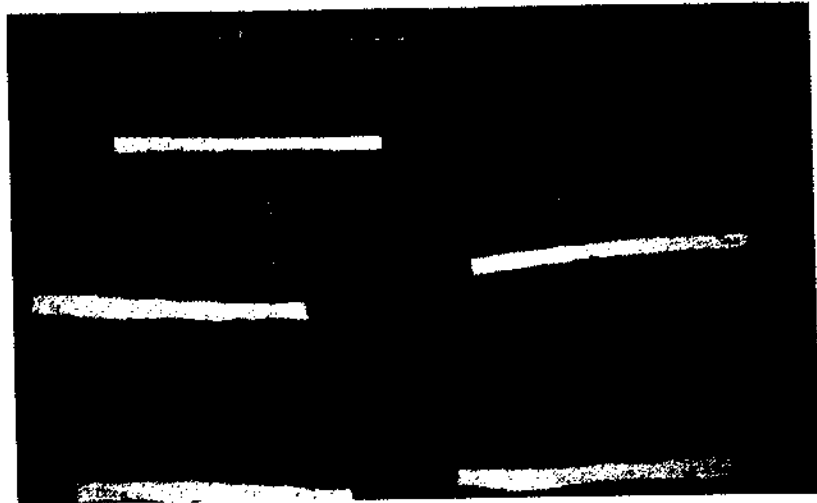


Bild 3

noch weiter ausdifferenziert
2 mal 3 und
1 mal 3 und
1 mal 2



Das Suchen und Aufzeichnen von Rechtecken erstreckte sich über die Mathematikstunden mehrerer Tage. Hierbei entdeckten einige Schüler, dass die Flächeninhalte der Rechtecke als Anzahl von Quadraten immer eine durch fünf teilbare Anzahl sein muss. Und so wurde bald versucht, zu jeder Einmaleins-Aufgabe der Fünferreihe ein Rechteck aus Pentominos zu finden. In den Schülergruppen wurde auffallend angeregt diskutiert und auch sehr liebevoll gezeichnet. Immer wieder wurden Erkenntnisse und Beobachtungen einzelner Gruppen im Klassengespräch aufgegriffen.

Zum Abschluss der Unterrichtseinheit wurde ein Buch zusammengestellt, in dem alle gefundenen Rechtecke zu Einmaleinsaufgaben abgebildet wurden. Je 2 Kinder waren für alle gefundenen Rechtecke zu jeweils einer 1 mal 5, 1 mal 10 oder 1 mal 15 Aufgabe verantwortlich. Sie mussten dazu immer wieder die gefundenen Rechtecke der anderen Kinder vergleichen und entscheiden, welche sie schon aufgezeichnet hatten oder auch nicht.

Alle Kinder bekamen am Ende der Unterrichtseinheit eine Miniaturversion des Buches im DIN-A-6-Format.

Wie kann es weiter gehen?

- mit Quadrat-Sechslingen
- mit Mehrlingen von gleichseitigen Dreiecken
- Flächenberechnung des Rechtecks durch Auslegen mit Einheitsquadraten



Literatur

Maria Koth/Notburga Grosser:
Das Pentomino-Buch; Aulis 2004

Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte; Klett/Kallmeyer 2008