

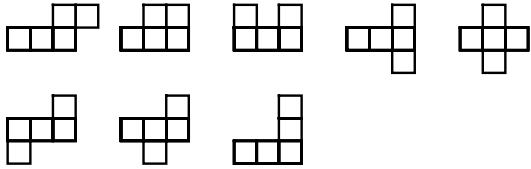



Pentominos – Figuren aus fünf Quadraten

Dr. Maria Koth, Wien

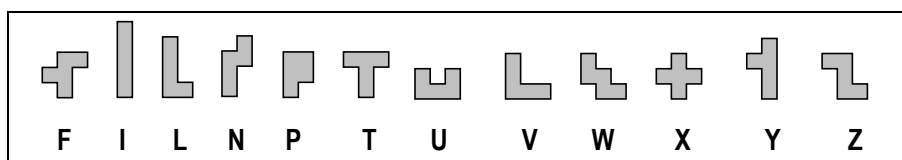
1. Was sind Pentominos?

Die zugrundeliegende Idee ist bestechend einfach: Fünf gleich große Quadrate werden so aneinandergefügt, dass je zwei benachbarte Quadrate eine gemeinsame Seite haben. Bleiben gespiegelte bzw. gedrehte Lagen unberücksichtigt, so entstehen auf diese Weise zwölf verschiedene Figuren:

Fünf Quadrate in einer Reihe:	
Die längste Reihe besteht aus vier Quadraten:	
Die längste Reihe besteht aus drei Quadraten:	
Die längste Reihe besteht aus zwei Quadraten:	

Die Entstehung der zwölf Pentominos

Um sich die Figuren besser merken zu können, ist es hilfreich, Assoziationen mit Buchstaben herzustellen, da jede der Figuren Ähnlichkeit mit einem Buchstaben des Alphabets hat. Folglich werden Pentominos üblicherweise mit F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z bezeichnet (vgl. Abb. unten). Für diese Zuordnung braucht man etwas Phantasie, doch sie hilft, die einzelnen Figuren zu unterscheiden und in verschiedenen Symmetrielagen zu erkennen.



Bezeichnung der Pentominos

Der Name Pentomino setzt sich zusammen aus der griechischen Vorsilbe für die Zahl Fünf und der Nachsilbe –omino. Pentominos findet man in der fachdidaktischen Literatur auch öfters unter der Bezeichnung »Quadratfünflinge«.

Quadrate und ihre Zusammensetzungen sind ein vielfältiges Legematerial. Es ist eine interessante Problemstellung, alle Quadratanordnungen aus 2, 3, 4, 5, ... Quadraten zu finden, bei denen benachbarte Quadrate jeweils eine Seite gemeinsam haben.

Der Zwillling besteht aus zwei Quadraten. Beim Drilling gibt es erstmals mehr als eine Möglichkeit. Ein Blick auf die Tabelle zeigt, dass die Zahl der möglichen Figuren dann rasch anwächst.

Name	Quadrate	Gesamtzahl der Figuren
Monomino (Einling)	1	1
Domino (Zwillling)	2	1
Tronimo (Drilling)	3	2
Tetronimo (Vierling)	4	5
Pentomino (Fünfling)	5	12
Hexomino (Sechsling)	6	35

Für Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht bieten sich vor allem die zwölf Pentominos in ihrer überschaubaren Anzahl an: Sind die fünf Quadratvierlinge für interessante Aufgabenstellungen zu wenige, so mangelt es bei vielen Problemen mit den 35 Quadratsechslingen bereits an Übersichtlichkeit. Erwähnenswert in diesem Zusammenhang ist, dass die fünf Quadratvierlinge, auch Tetrominos genannt, durch das Computerspiel „Tetris“ einen weltweiten Bekanntheitsgrad erreicht haben. Auch beim beliebten Strategiespiel „Blokus“ geht es um das geschickte Anordnen von Quadratmehrlingen.

Kinder gewinnen mit Pentominos Erfahrungen im Bereich geometrischer Formen: Formen erkennen, wiedererkennen, räumlich drehen, spiegeln, einpassen, etc. Pentominos eignen sich für einfache Legeaufgaben bis hin zu handlungsorientierten Zugängen zu Flächen- und Umfangsbestimmungen. Begriffe wie Flächeninhalt, Umfang, symmetrisch und deckungsgleich können auf spielerische Art und Weise gefestigt werden.













Aufgaben mit Pentominos schulen das räumliche Vorstellungsvermögen und fördern systematisches und strategisches Denken. Sie ermuntern Schülerinnen und Schüler zum Argumentieren und Begründen und bieten außerdem eine abwechslungsreiche Übungsmöglichkeit. Sie können sowohl im herkömmlichen Mathematikunterricht als auch in offenen Lernsituationen sinnvoll eingesetzt werden.

Pentominos sind hervorragend geeignet als Arbeitsmaterial, welches vielfältigen Ansprüchen genügt. Das Material ermöglicht differenzierte Aufgabenstellungen, lässt verschiedene Lösungswege zu, berücksichtigt unterschiedliches Arbeitstempo, erlaubt eine Selbstkontrolle, unterstützt die Kooperation in Kleingruppen, spricht neben der kognitiven auch die motorische und emotionale Ebene an, fördert die Kreativität und weckt Neugier. Kinder zeigen erfahrungsgemäß spontan Interesse sowohl am Material als auch an den Aufgabenstellungen, die auf den ersten Blick einfach und verständlich wirken.

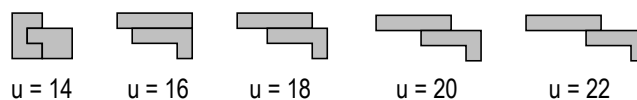
Im Folgenden werden einige Beispiele für Aufgabenstellungen vorgestellt; viele weitere Anregungen für den Unterricht findet man etwa in: Koth, M. und Grosser, N., Das Pentomino – Buch. Aulis Verlag Deubner (2004).

2. Der Umfang von Pentominofiguren

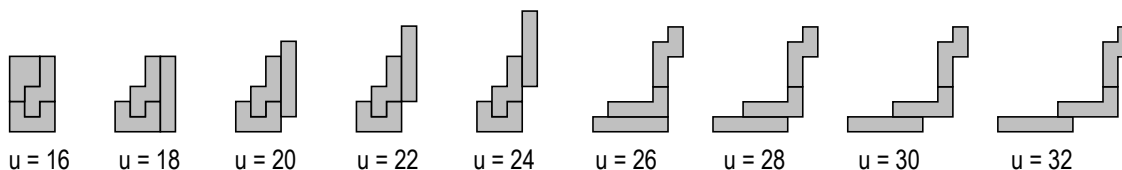
Jedes Pentomino ist aus fünf gleich großen Quadraten zusammengesetzt. Daher haben alle zwölf Pentominos den gleichen Flächeninhalt, aber nicht alle haben auch gleich großen Umfang. Pentominofiguren helfen den Kindern zu erkennen, dass flächeninhaltsgleich nicht gleichbedeutend ist mit umfangsgleich.

Pentomino												
Umfang	12	12	12	12	10	12	12	12	12	12	12	12

Zwei Pentominos kann man auf vielerlei Arten zu 10-Ominofiguren zusammenfügen. Alle diese Figuren haben Flächeninhalt zehn, ihr Umfang dagegen kann die Werte 14, 16, 18, 20 oder 22 annehmen:



Ominofiguren aus 3 Pentominos können Umfang 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30 oder 32 haben:



Analog dazu kann man Ominofiguren aus vier, aus fünf, aus sechs, ... Pentominos zusammensetzen und überlegen, welche Werte der Umfang dieser Figuren annehmen kann.

Anzahl der Pentominos	Möglicher Umfang
1	10, 12
2	14, 16, 18, 20, 22
3	16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32
4	18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42
5	20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52

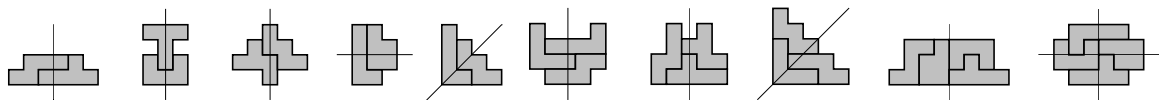
Anzahl der Pentominos	Möglicher Umfang
6	22, 24, 26, 28, 30,, 54, 56, 58, 60, 62
7	24, 26, 28, 30, 32,, 64, 66, 68, 70, 72
8	26, 28, 30, 32, 34,, 74, 76, 78, 80, 82
9	28, 30, 32, 34, 36,, 84, 86, 88, 90, 92
10	30, 32, 34, 36, 38,, 94, 96, 98, 100, 102
11	32, 34, 36, 38, 40,, 104, 106, 108, 110, 112
12	32, 34, 36, 38, 40,, 112, 114, 116, 118, 120

3. Symmetrische Figuren

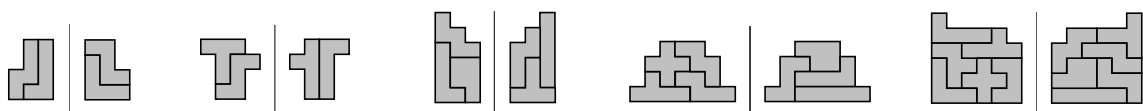
- a) Die Kinder sollen erkennen, welche der zwölf Pentominos spiegelsymmetrisch sind und sollen die Symmetrieachsen zeigen können.

Pentomino												
Anzahl der Symmetrieachsen	0	2	0	0	0	1	1	1	1	4	0	0

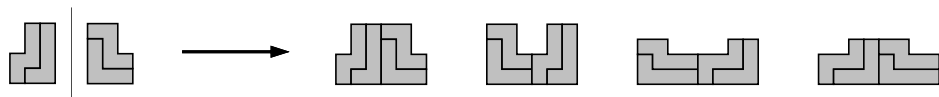
- b) Die Kinder sollen symmetrische Figuren aus zwei bis vier Pentominos zusammensetzen und diese Figuren auf Karopapier aufzeichnen:



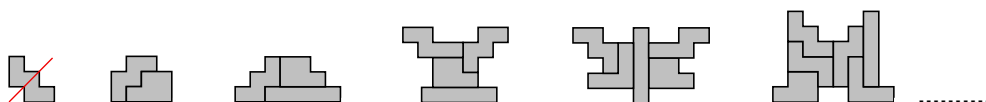
- c) Die Kinder sollen Figuren aus zwei Pentominos zusammensetzen und dann aus zwei weiteren Pentominos eine dazu symmetrische Figur finden. Analog dazu können auch Figuren aus drei, aus vier, aus fünf oder aus sechs Pentominos gelegt und aus drei bis sechs weiteren Pentominos eine dazu symmetrische Figur gesucht werden.



- d) Zwei deckungsgleiche Figuren kann man auf verschiedene Arten zu einer spiegelsymmetrischen Figur zusammenfügen.



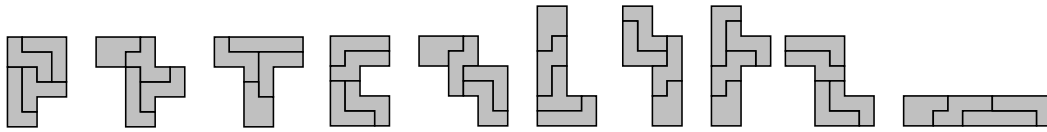
- e) Ein symmetrisches Pentomino wird als erste Figur gewählt. Dann sollen die Kinder ein beliebiges zweites Pentomino auswählen und eine achsensymmetrische Figur aus diesen beiden Pentominos zusammensetzen. Danach wird Schritt für Schritt ein weiteres Pentomino dazugenommen und jeweils eine symmetrische Figur aus allen 3, 4, 5, 6, ... bereits gewählten Pentominos gesucht.



4. Vergrößern von Figuren

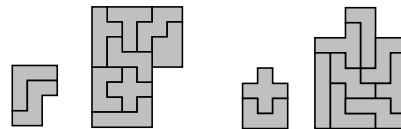
a) „Verdoppeln“ von Pentominos

Bei zehn der zwölf Pentominos ist es möglich, die Figur mit vier Steinen maßstäblich vergrößert mit doppelten Seitenlängen nachzubauen. Beispiele für Lösungen sind:



b) „Verdoppeln“ einer 10-Ominofigur aus zwei Pentominos

Zum „Verdoppeln“ einer aus zwei Pentominos zusammengesetzten Figur benötigt man acht Steine, zum Beispiel:



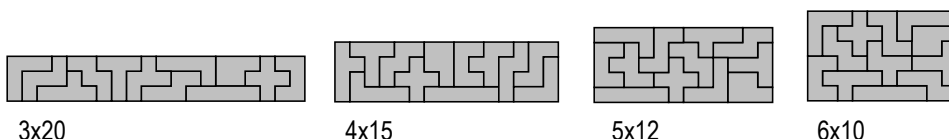
c) „Verdreifachen“ der zwölf Pentominos

Jedes der zwölf Pentominos kann aus neun Steinen mit dreifachen Seitenlängen vergrößert nachgebaut werden. Dabei kann man für jede der zwölf Figuren sowohl Lösungen finden, bei denen der zu vergrößernde Stein nicht als Baustein vorkommt als auch Lösungen unter Verwendung des zu vergrößernden Steins. Beispiele für Verdreifachungen einiger Pentominos sind:



5. Pentomino – Rechtecke

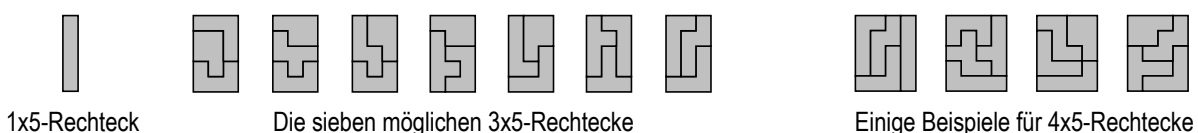
Alle zwölf Pentominos zusammen haben Flächeninhalt 60, und man kann damit 3x20-, 4x15-, 5x12- und auch 6x10-Rechtecke lückenlos ausfüllen:



Von symmetrischen Lagen abgesehen gibt es zwei Lösungen für 3x20- Rechtecke, 68 Lösungen für 4x15- Rechtecke, 1010 Lösungen für 5x12-Rechtecke und sogar 2339 Lösungen für 6x10-Rechtecke. Das Zusammensetzen solcher Rechtecke aus allen zwölf Pentominos erfordert eine gute Vertrautheit mit den zwölf Figuren und stellt eine besondere Herausforderung für leistungsstarke Kinder dar.

Wesentlich einfacher dagegen ist die Aufgabenstellung, nach und nach Rechtecke aus einem, aus drei, aus vier, aus fünf, Pentominos zusammensetzen. Hier sind 1x5-, 3x5-, 2x10-, 4x5-, 5x5-, 3x10-, 5x6-, 5x7-, 5x8-, 4x10-, 3x15-, 5x9-, 5x10- und 5x11-Rechtecke möglich.

Der I-Stein ist das einzige 1x5-Rechteck. Von symmetrischen Lagen abgesehen gibt es sieben verschiedene 3x5-Rechtecke. Mit wachsender Zahl der Pentominos nimmt die Anzahl der möglichen Rechtecke dann sehr stark zu: So lassen sich schon 50 verschiedene 4x5-Rechtecke, 107 verschiedene 5x5-Quadrate, 541 mögliche 5x6-Rechtecke usw. zusammensetzen.



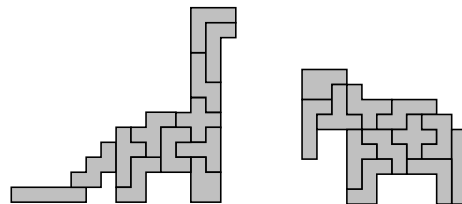
1x5-Rechteck

Die sieben möglichen 3x5-Rechtecke

Einige Beispiele für 4x5-Rechtecke

6. Pentominos – Eine Welt aus zwölf mal fünf Quadraten

Schließlich kann man aus den zwölf Pentominos - wie beim klassischen Tangramspiel - eine Vielzahl weiterer Figuren zusammensetzen, wie zum Beispiel Herzen und Kreuze, Buchstaben und Ziffern, Häuser und Türme, Brücken und Schiffe, Vögel und Fische sowie viele weitere Tiere vom Elefanten bis zum Dinosaurier.



Es ergeben sich viele Ideen für den kreativen Umgang; die Kinder können hier ihrer Fantasie freien Lauf lassen. Die Figuren können in verschiedenen Übungsformen angeboten werden:

- Das Nachlegen verkleinert vorgegebener Bilder, in denen man (wie in den Abbildungen oben) die einzelnen Pentominos sieht, ermöglicht den Kindern mit den zwölf Figuren vertraut zu werden.
- Schwieriger ist das Ausfüllen von Figuren, bei denen nur die Umrissfigur vorgegeben ist.



Viele weitere Aufgabenstellungen zum Arbeiten mit Pentominos findet man in

Koth, M. und Grosser, N., Das Pentomino – Buch. Aulis Verlag Deubner (2004). ISBN 3-7614-2543-0
Grosser, N. und Koth, M., Alles klar! 3. Mathematik für wissbegierige Schulkinder. Veritas-Verlag (2007)
Grosser, N. und Koth, M., Alles klar! 4. Mathematik für erfahrene Schulkinder. Veritas-Verlag (2008)

Einige Bezugsquellen für Pentomino-Figuresätze aus Kunststoff:

- Veritas-Verlag Linz www.veritas.at
- Lehrmittelverlag Betzold www.betzold.at

Auch beim bekannten Strategiespiel **Blokus** kommen die Pentominofiguren vor: Dieses Spiel besteht aus je vier Figuresätzen aller 21 möglichen aus ein bis fünf Quadraten bestehenden Ominofiguren sowie aus einem Spielfeld mit 20x20 quadratischen Feldern zum Auflegen dieser Figuren. (Das Blokus-Spielfeld könnte also auch zum Legen von Pentominofiguren verwendet werden.) Das Spiel Blokus ist im Spielwarenhandel und auch bei www.amazon.de erhältlich.

Prof. Dr. Maria Koth
PH Wien und
Fakultät für Mathematik
der Universität Wien
maria.koth@univie.ac.at

